LAHENDUSED   12. KLASS

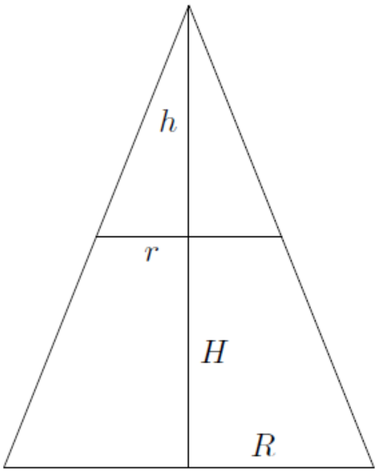
1. **Vastus: Puukarpi jäi $\frac{5}{8}$ seal algselt olnud seemnetest.**

Lahendus:

Olgu koonusekujulise klaasnõu kõrgus H ja selle nõu põhja raadius R. Siis on selle klaasnõu ruumala $V_1 = \frac{\pi R^2 H}{3}$. Olgu puukarbi ruumala V_2. Siis on $V_1 = \frac{3}{7}V_2$.

Kui klaasnõusse valati seemned, siis jäi klaasnõust täitmata osa, mis oli samuti koonusekujuline. Selle kõrgus oli $h = \frac{H}{2}$.

Olgu täitmata jäänud osa põhja raadius r. Siis tekivad meil sarnased täisnurksed kolmnurgad: üks, mille üks kaatet on pikkusega H ja teine kaatet pikkusega R ning teine, mille vastavad kaatetid on pikkustega $h = \frac{H}{2}$ ja r.



Kolmnurkade sarnasuse tõttu peab kehtima seos $\frac{r}{h} = \frac{R}{H}$. Siit saame, et $r = \frac{R}{2}$. Järelikult oli tühjaks jäänud koonuseosa ruumala $V_3 = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{V_1}{8}$ ning seemnetega täideti $\frac{7}{8}$ koonusekujulise klaasnõu ruumalast V_1.

Leiame, kui suure osa kuubi ruumalast V_2 täitsid väljavalatud seemned: $\frac{7}{8}V_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7}V_2 = \frac{3}{8}V_2$.

Järelikult jäi puukarpi alles $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ algselt purgis olnud seemnetest.

Hindamine:

On leitud, kui suure osa koonuse ruumalast täitsid seemned.	4p
On leitud, kui suure osa puukarbi ruumalast täitsid sealt välja valatud seemned.	2p
On leitud, kui suur osa seemnetest jäi puukarpi.	1p
	7p

2. Vastus: 1. Iga reaalarvu $\boldsymbol{x}$ korral, mille puhul $\boldsymbol{x \neq \pm\frac{k\pi}{2}}$ ühegi $\boldsymbol{k\epsilon\mathbb{N}}$ korral, on $\boldsymbol{f(x) = g(x) = h(x) = i(x)}$.
2. $\boldsymbol{x\epsilon\{-\pi, 0, \pi\}}$

<u>Lahendus:</u>

1) Paneme tähele, et funktsioonide $f(x)$, $h(x)$ ja $i(x)$ määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk $\mathbb{R}$. Avaldise $g(x)$ määramispiirkonda ei kuulu aga $x = \pm\frac{k\pi}{2}$ ühegi naturaalarvu k korral. Kasutades abivalemeid ja trigonomeetrilisi seoseid, lihtsustame avaldisi:

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

$$g(x) = (1 - \tan^2 x)(1 - \sin^2 x) = \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \cdot \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

kui $x \neq \pm\frac{k\pi}{2}$

$$h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

ja

$$i(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x.$$

Näeme, et $f(x) = g(x) = h(x) = i(x)$ iga reaalarvu $x \neq \pm\frac{k\pi}{2}, k\epsilon\mathbb{N}$ korral.

2) Et $g(x) = \cos 2x$ ja koosinusfunktsiooni suurim väärtus on 1, tuleb leida võrrandi $\cos 2x = 1$ lahendid, mis kuuluvad lõiku $[-\pi; \pi]$. Kuna $\cos 2k\pi = \cos(-2k\pi) = 1$ iga $k\epsilon\mathbb{N}$ korral, siis sobivateks lahenditeks on $x = \pm\pi$ ja $x = 0$.

<u>Hindamine:</u>

Avaldiste lihtsustamine.	3p
Argumentide $x = \pm\frac{k\pi}{2}$, kus $k\epsilon\mathbb{N}$, välja jätmine funktsiooni $g(x)$ Määramispiirkonnast.	1p
Lõppjärelduse tegemine.	1p
Küsitud argumendi väärtuste leidmine.	<u>2p</u>
	7p

3. Vastus: 1. on väär, 2. ja 3. aga tõesed väited.

Lahendus:

1. Lisades jada mõned liikmed, saame

   $$1, \quad 3, \quad 4, \quad 7, \quad 11, \quad 18, \quad 29, \quad 47, \quad 76, \quad 123, \ldots$$

   Paneme tähele, et jada iga kolmas liige on paarisarv, sest kahe paaritu arvu summa on alati paarisarv ning paaritu ja paarisarvu summa on alati paaritu arv. Seega, paarisarvu järjenumber jadas peab jaguma arvuga 3. Arv 2023 aga ei jagu arvuga 3. Järelikult jada liige a_{2023} ei ole paarisarv ja väide 1 on väär.

2. Paneme tähele, et väljakirjutatud liikmetest $a_2 = 3$, $a_6 = 18$ ja $a_{10} = 123$ jaguvad arvuga 3. Näitame, et alates liikmest a_2 iga neljas liige jagub arvuga 3. Selleks kanname tabelisse jäägid, mis tekivad jada liikme jagamisel kolmega. Seda lihtsustab teadmine, et kahe arvu summa jääk on sama, mis nende arvude jääkide summa jääk jagamisel kindla naturaalarvuga. Näeme, et jäägid hakkavad tsükliliselt korduma ja tsükli pikkuseks sobib 8. Igas tsüklis on aga teise ja kuuenda liikme jääk 0 jagamisel arvuga 3. Kuna $2023 = 8 \cdot 252 + 7$, siis on 252 jääkide tsüklit ja üle jääb 7 jääki, millest igaühes on kaks jääki 0. Seega on jada esimese 2023 liikme seas arvuga 3 jaguvate liikmete arv $252 \cdot 2 + 2 = 504 + 2 = 506$ ja teine väide on õige.
3. Kanname tabelisse jäägid jada liikmete jagamisel arvuga 5. Näeme, et jäägid hakkavad korduma tsükliga 1, 3, 4, ja 2 ning ükski jääk ei ole 0. Seega, ühtegi viiega jaguvat arvu antud jadas ei ole ja väide 3 on õige.

Jada liige	1	3	4	7	11	18	29	47	
Jääk jagamisel kolmega	1	0	1	1	2	0	2	2	
Jääk jagamisel viiega	1	3	4	2	1	3	4	2	
Jada liige	76	123	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	jne
Jääk jagamisel kolmega	1	0	1	1	2	0	2	2	jne
Jääk jagamisel viiega	1	3	4	2	1	3	4	2	jne

Hindamine:

Esimeste liikmete põhjal on püstitatud hüpotees paarisarvude paiknemise kohta selles jadas ja tehtud järeldus liikme a_{2023} kohta.	1p
Põhjendatud, et püstitatud hüpotees paarisarvude paiknemise kohta on tõene kogu jadas.	1p
Püstitatud hüpotees kolmega jaguvate liikmete paiknemise kohta selles jadas.	1p
Põhjendatud, et püstitatud hüpotees on tõene kogu jadas.	1p
Arvutatud kolmega jaguvate liikmete arv.	1p
Tõestatud, et jadas puuduvad viiega jaguvad liikmed.	2p
	7p

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 0p.

4. **Vastus: $x_1 = -3, x_2 = -2$**

<u>Lahendus:</u>

Võrrandi parempoolse avaldise $x^2 + 5x + 7$ määramispiirkonnaks on kogu reaaltelg ning $x^2 + 5x + 7 = 1 - (-x^2 - 5x - 6) = 1 - (x + 3)(-x - 2)$.

Paneme tähele, et avaldise $\sqrt{x+3}$ määramispiirkonnaks on $-3 \leq x$ ja avaldise $\sqrt{-x-2}$ määramispiirkonnaks on $x \leq -2$, mis teeb esialgse võrrandi vasakpoolse avaldise $\sqrt{x+3} + \sqrt{-x-2}$ (ja ühtlasi kogu võrrandi) määramispiirkonnaks $-3 \leq x \leq -2$.

Paneme tähele, et võrrandi vasakpoolse avaldise $\sqrt{x+3} + \sqrt{-x-2}$ ruut on oma määramispiirkonnas võrdne avaldisega

$$x + 3 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{-x-2} + (-x - 2) = 1 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{-x-2} \geq 1,$$

Kusjuures vahemikus $-3 < x < -2$ on $\sqrt{x+3} > 0$ ja $\sqrt{-x-2} > 0$. Seega peab ka esialgse võrrandi vasakpoolse avaldise väärtus vahemikus $-3 < x < -2$ olema rangelt suurem kui 1.

Avaldise $(x + 3)(-x - 2) = -x^2 - 5x - 6$ nullkohad on $x = -3$ ja $x = -2$.

Et ruutliikme kordaja on siin negatiivne, siis avaneb avaldise graafikuks olev ruutparabool allapoole, mistõttu on vahemikus $-3 < x < -2$ avaldise $(x + 3)(-x - 2)$ väärtus rangelt positiivne.

Järelikult on vahemikus $-3 < x < -2$ esialgse võrrandi parempoolse avaldise $1 - (x + 3)(-x - 2)$ väärtus väiksem kui 1. Et selles vahemikus oli esialgse võrrandi vasakpoolse avaldise väärtus rangelt suurem kui 1, siis ei saa vahemikus $-3 < x < -2$ võrrandil lahendeid olla.

Jääb veel vaid tähele panna, et väärtustel $x = -3$ ja $x = -2$ on võrrandi mõlemate poolte väärtused võrdsed arvuga 1, mistõttu on $x = -3$ ja $x = -2$ selle võrrandi ainsateks lahenditeks.

<u>Hindamine:</u>

On näidatud, et võimalikud lahendid kuuluvad lõiku $[-3; -2]$.	3p
Kontrollitud, et $x = -3$ ja $x = -2$ on võrrandi lahendid.	1p
On näidatud, et vahemikus $(-3; -2)$ lahendeid ei ole.	<u>3p</u>
	7p

5. **Vastus: esimene ja kolmas konn satuvad esimestena ühele toolile, see on 2022. tool.**

<u>Lahendus:</u>

Peale esimest hüpet on konnad toolidel 1, 2, 3. Peale teist hüpet on konnad toolidel 5, 7, 9, jne. Kuna peale igat hüpet vahe konnade vahel suureneb ühe võrra, siis peale 1011 hüpet on esimese ja teise konna toolinumbrite vahe 1011 ning esimese ja kolmanda konna toolinumbrite vahe on 2022, ehk nad on samal toolil.

Nüüd arvutame, mitmes tool see on.

Kuna peale igat hüpet suureneb vahe konnade vahel ühe ja sama arvu võrra, siis meil on aritmeetiline jada, kus

$a_1 = 1, \quad a_n = a_1 + 3(n-1)$ ehk $a_{1011} = 1 + 3 \cdot 1010 = 3031.$

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}, \ S_{1011} = \frac{3032\cdot 1011}{2} = 1532676.$

Kuna meil on vaja teada tooli numbrit, siis see võrdub jäägiga, mis jääb suuruse S_{2022} jagamisel arvuga 2022~~.~~

Kui jagada summa 2022-ga siis vastuseks tuleb 758 ehk jäägiks jääb 0, mis tähendab, et konnad kohtuvad toolil numbriga 2022.

<u>Hindamine:</u>

Märkamine, et peale igat hüpet vahe konnade vahel suureneb ühe võrra.	1p
Tähelepanek ja tõestamine, et 1. ja 3. konn satuvad ühele ja samale toolile esimestena.	2p
Arvutamine, kui mitu hüpet teeb 1. (või 3.) konn 2022 tunni jooksul.	2p
Selle alusel leidmine, mitmendal toolil konnad kohtuvad.	<u>2p</u>
	7p